2.12) $B = \{\underbrace{[1\ 1\ 0]^T}_{B_1}, \underbrace{[1\ -1\ 0]^T}_{B_2}, \underbrace{[0\ 0\ 1]^T}_{B_3}\}$,

$T(B_1) = [1\ \ -3/2\ \ 2]^T$,

$T(B_2) = [-3\ \ 9/2\ \ -6]^T$,

$T(B_3) = [2\ \ -3\ \ 4]^T$

a) ¿ $T([2\ 3\ 5])$ ?

Sabemos que $\{B_1, B_2, B_3\}$ es base de $\mathbb{R}^3$, por lo tanto un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$ podrá escribirse como:

$(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 . B_1 + \alpha_2 . B_2 + \alpha_3 . B_3$, I

Uso la linealidad de T y:

$T(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 . T(B_1) + \alpha_2 . T(B_2) + \alpha_3 . T(B_3) \rightarrow$

$\rightarrow T(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 . [1\ -3/2\ \ 2]^T + \alpha_2 . [-3\ \ 9/2\ -6]^T + \alpha_3 . [2\ -3\ \ 4]^T$ II

Con I hallo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ~~ya~~ ya que:

$(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 . [1\ 1\ 0]^T + \alpha_2 . [1\ -1\ 0]^T + \alpha_3 . [0\ 0\ 1]^T$

Por lo tanto:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x_1 \rightarrow \alpha_1 = x_1 - \alpha_2 \rightarrow \alpha_1 = x_1 - \dfrac{x_1 - x_2}{2} \rightarrow \boxed{\alpha_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}} \\ \alpha_1 - \alpha_2 = x_2 \rightarrow x_1 - 2\alpha_2 = x_2 \rightarrow \boxed{\alpha_2 = \dfrac{x_1}{2} - \dfrac{x_2}{2}} \\ \boxed{\alpha_3 = x_3} \end{cases}$$

Entonces

II $\Rightarrow T(x_1, x_2, x_3) = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) . [1\ -3/2\ \ 2]^T + \left(\dfrac{x_1 - x_2}{2}\right) . [-3\ \ 9/2\ -6]^T + x_3 . [2\ -3\ \ 4]^T \rightarrow$

$\rightarrow T(x1,x2,x3) = \left[\frac{x1+x2}{2} \quad \frac{-3x1-3x2}{4} \quad x1+x2\right]^T + \left[\frac{-3x1+3x2}{2} \quad \frac{9x1-9x2}{4} \quad -3x1+3x2\right]^T$ SIGUE

$+\left[2x3 \quad -3x3 \quad 4x3\right] \rightarrow$

$\rightarrow T(x1,x2,x3) = \left[-x1+2x2+2x3 \quad \frac{6x1-12x2-3x3}{4} \quad -2x1+4x2+4x3\right]^T$

Ahora evalúo en $[2\ 3\ 5]^T$

$$\boxed{\rightarrow T([2\ 3\ 5]^T) = [14\ \ -21\ \ 28]^T}$$

b) Busco Nu(T)

$Nu(T) \rightarrow \left\{(x1,x2,x3) \in \mathbb{R}^3 : \left[-x1+2x2+2x3 \quad \frac{6x1-12x2-3x3}{4} \quad -2x1+4x2+4x3\right]^T = [0\ 0\ 0]^T\right\}$

Por lo tanto:

$$\begin{cases} -x1+2x2+2x3=0 \\ \frac{3}{2}x1-3x2-3x3=0 \\ -2x1+4x2+4x3=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & -3 & -3 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \rightarrow F2 \rightarrow \frac{3}{2}F1+F2 \\ F3 \rightarrow 2F1-F3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$\rightarrow -x1+2x2+2x3=0 \rightarrow x1 = 2x2+2x3$, entonces un $\bar{X}$ q' cumpla es de la forma

$\bar{X} = (2x2+2x3, x2, x3) = x2.(2,1,0) + x3.(2,0,1)$

Por lo tanto una base del núcleo de T es $\boxed{B_{NuT} = \{(2,1,0),(2,0,1)\}}$

Flamo que contiene el (0,0,0)

c) Busco Im T:

$T([1\ 0\ 0]^T) = [-1\ \ 3/2\ \ -2]^T$, $T([0\ 1\ 0]^T) = [2\ -3\ \ 4]^T$, $T([0\ 0\ 1]^T) = [2\ -3\ \ 4]^T$

Por lo tanto:

$\text{Im}T = \langle [-1\ \ 3/2\ \ -2]^T, [2\ -3\ \ 4]^T, [2\ -3\ \ 4]^T \rangle$, claramente ~~a~~ la segunda comp. es igual a la tercera, saco una.

$\text{Im}T = \langle [-1\ \ 3/2\ \ -2]^T, [2\ -3\ \ 4]^T \rangle$, pero si multiplico la primera por $-2$ obtengo la segunda, saco una (la segunda) y queda de una sola componente, entonces es base:

$$\boxed{B\,\text{Im}T = \{[-1\ \ 3/2\ \ -2]^T\}}$$

Recta en $\mathbb{R}^3$ que ~~[illegible]~~ pasa por el $(0,0,0)$.